Inference at $*$ 1 1 0
of proof for Lemma equiv_rel_functionality_wrt_iff:

1. T : Type
2. T' : Type
3. E : $T \to T \to \mathbb{P}$
4. E' : $T' \to T' \to \mathbb{P}$
5. $T = T'$
6. $\forall x, y{:}T.\ E(x,y) \iff E'(x,y)$

$\vdash$ $(\forall a{:}T.\ E(a,a))$
& $(\forall a, b{:}T.\ E(a,b) \Rightarrow E(b,a))$
& $(\forall a, b, c{:}T.\ E(a,b) \Rightarrow E(b,c) \Rightarrow E(a,c)))$
$\iff$ $((\forall a{:}T'.\ E'(a,a))$
& $(\forall a, b{:}T'.\ E'(a,b) \Rightarrow E'(b,a))$
& $(\forall a, b, c{:}T'.\ E'(a,b) \Rightarrow E'(b,c) \Rightarrow E'(a,c)))$
by PERMUTE{1:n,
2:n,
3:n,
3:n,
4:n,
5:n,
6:n,
7:n,
8:n,
8:n,
9:n,
10:n,
11:n,
12:n,
12:n,
8:n,
13:n,
14:n,
15:n,
16:n,
8:n,
8:n,
17:n,
18:n,
11:n,
19:n,
19:n,
20:n,
21:n,

22:n,
23:n,
24:n,
25:n,
26:n,
27:n,
28:n,
28:n,
27:n,
19:n,
8:n,
8:n,
8:n,
29:n,
30:n,
11:n,
19:n,
19:n,
31:n,
32:n,
22:n,
33:n,
33:n,
34:n,
35:n,
36:n,
37:n,
38:n,
39:n,
40:n,
41:n,
42:n,
43:n,
44:n,
45:n,
46:n,
42:n,
47:n,
41:n,
47:n,
33:n,
19:n,
8:n,
48:n,
49:n}

1: . . . . .wf. . . . . NILNIL

$\vdash ((\forall a{:}T.\ E(a,a))$
$\quad \& (\forall a,\ b{:}T.\ E(a,b) \Rightarrow E(b,a))$
$\quad \& (\forall a,\ b,\ c{:}T.\ E(a,b) \Rightarrow E(b,c) \Rightarrow E(a,c)))$
$\quad \in \mathbb{P}$
2: . . . . .wf. . . . . NILNIL

$\vdash ((\forall a{:}T.\ E'(a,a))$
$\quad \& (\forall a,\ b{:}T.\ E'(a,b) \Rightarrow E'(b,a))$
$\quad \& (\forall a,\ b,\ c{:}T.\ E'(a,b) \Rightarrow E'(b,c) \Rightarrow E'(a,c)))$
$\quad \in \mathbb{P}$
3: . . . . .wf. . . . . NILNIL

$\vdash ((\forall a{:}T'.\ E'(a,a))$
$\quad \& (\forall a,\ b{:}T'.\ E'(a,b) \Rightarrow E'(b,a))$
$\quad \& (\forall a,\ b,\ c{:}T'.\ E'(a,b) \Rightarrow E'(b,c) \Rightarrow E'(a,c)))$
$\quad \in \mathbb{P}$
4: . . . . .wf. . . . . NILNIL

$\vdash (\forall a{:}T.\ E(a,a)) \in \mathbb{P}$
5: . . . . .wf. . . . . NILNIL

$\vdash (\forall a{:}T.\ E'(a,a)) \in \mathbb{P}$
6: . . . . .wf. . . . . NILNIL

$\vdash ((\forall a,\ b{:}T.\ E(a,b) \Rightarrow E(b,a)) \ \& \ (\forall a,\ b,\ c{:}T.\ E(a,b) \Rightarrow E(b,c) \Rightarrow E(a,c))) \in \mathbb{P}$
7: . . . . .wf. . . . . NILNIL

$\vdash ((\forall a,\ b{:}T.\ E'(a,b) \Rightarrow E'(b,a)) \ \& \ (\forall a,\ b,\ c{:}T.\ E'(a,b) \Rightarrow E'(b,c) \Rightarrow E'(a,c))) \in \mathbb{P}$
8: . . . . .wf. . . . . NILNIL

$\vdash T \in \text{Type}$
9: . . . . .wf. . . . . NILNIL

$\vdash (\lambda a.E(a,a)) \in T \rightarrow \mathbb{P}$
10: . . . . .wf. . . . . NILNIL

$\vdash (\lambda a.E'(a,a)) \in T \rightarrow \mathbb{P}$
11: . . . . .wf. . . . . NILNIL

$\vdash T = T$
12: . . . . .wf. . . . . NILNIL

7. $a : T$
$\vdash a \in T$

13: . . . . .wf. . . . . NILNIL

⊢ $(\forall a,\, b{:}T.\ E(a,b) \Rightarrow E(b,a)) \in \mathbb{P}$
14: . . . . .wf. . . . . NILNIL

⊢ $(\forall a,\, b{:}T.\ E'(a,b) \Rightarrow E'(b,a)) \in \mathbb{P}$
15: . . . . .wf. . . . . NILNIL

⊢ $(\forall a,\, b,\, c{:}T.\ E(a,b) \Rightarrow E(b,c) \Rightarrow E(a,c)) \in \mathbb{P}$
16: . . . . .wf. . . . . NILNIL

⊢ $(\forall a,\, b,\, c{:}T.\ E'(a,b) \Rightarrow E'(b,c) \Rightarrow E'(a,c)) \in \mathbb{P}$
17: . . . . .wf. . . . . NILNIL

⊢ $(\lambda a.\forall b{:}T.\ E(a,b) \Rightarrow E(b,a)) \in T \rightarrow \mathbb{P}$
18: . . . . .wf. . . . . NILNIL

⊢ $(\lambda a.\forall b{:}T.\ E'(a,b) \Rightarrow E'(b,a)) \in T \rightarrow \mathbb{P}$
19: . . . . .wf. . . . . NILNIL

7. T
⊢ $T \in$ Type
20: . . . . .wf. . . . . NILNIL

7. $a : T$
⊢ $(\lambda b.E(a,b) \Rightarrow E(b,a)) \in T \rightarrow \mathbb{P}$
21: . . . . .wf. . . . . NILNIL

7. $a : T$
⊢ $(\lambda b.E'(a,b) \Rightarrow E'(b,a)) \in T \rightarrow \mathbb{P}$
22: . . . . .wf. . . . . NILNIL

7. T
⊢ $T = T$
23: . . . . .wf. . . . . NILNIL

7. $a : T$
8. $b : T$
⊢ $E(a,b) \in \mathbb{P}$
24: . . . . .wf. . . . . NILNIL

7. $a : T$
8. $b : T$
⊢ $E'(a,b) \in \mathbb{P}$
25: . . . . .wf. . . . . NILNIL

7. $a : T$
8. $b : T$
$\vdash E(b,a) \in \mathbb{P}$
26: . . . . .wf. . . . . NILNIL

7. $a : T$
8. $b : T$
$\vdash E'(b,a) \in \mathbb{P}$
27: . . . . .wf. . . . . NILNIL

7. $a : T$
8. T
$\vdash a \in T$
28: . . . . .wf. . . . . NILNIL

7. T
8. $b : T$
$\vdash b \in T$
29: . . . . .wf. . . . . NILNIL

$\vdash (\lambda a.\forall b,\, c{:}T.\ E(a,b) \Rightarrow E(b,c) \Rightarrow E(a,c)) \in T \rightarrow \mathbb{P}$
30: . . . . .wf. . . . . NILNIL

$\vdash (\lambda a.\forall b,\, c{:}T.\ E'(a,b) \Rightarrow E'(b,c) \Rightarrow E'(a,c)) \in T \rightarrow \mathbb{P}$
31: . . . . .wf. . . . . NILNIL

7. $a : T$
$\vdash (\lambda b.\forall c{:}T.\ E(a,b) \Rightarrow E(b,c) \Rightarrow E(a,c)) \in T \rightarrow \mathbb{P}$
32: . . . . .wf. . . . . NILNIL

7. $a : T$
$\vdash (\lambda b.\forall c{:}T.\ E'(a,b) \Rightarrow E'(b,c) \Rightarrow E'(a,c)) \in T \rightarrow \mathbb{P}$
33: . . . . .wf. . . . . NILNIL

7. T
8. T
$\vdash T \in \mathrm{Type}$
34: . . . . .wf. . . . . NILNIL

7. $a : T$
8. $b : T$
$\vdash (\lambda c.E(a,b) \Rightarrow E(b,c) \Rightarrow E(a,c)) \in T \rightarrow \mathbb{P}$
35: . . . . .wf. . . . . NILNIL

7. $a : T$
8. $b : T$

$\vdash (\lambda c.E'(a,b) \Rightarrow E'(b,c) \Rightarrow E'(a,c)) \in T \rightarrow \mathbb{P}$
36: . . . . .wf. . . . . NILNIL

7. T
8. T
$\vdash T = T$
37: . . . . .wf. . . . . NILNIL

7. $a : T$
8. $b : T$
9. T
$\vdash E(a,b) \in \mathbb{P}$
38: . . . . .wf. . . . . NILNIL

7. $a : T$
8. $b : T$
9. T
$\vdash E'(a,b) \in \mathbb{P}$
39: . . . . .wf. . . . . NILNIL

7. $a : T$
8. $b : T$
9. $c : T$
$\vdash (E(b,c) \Rightarrow E(a,c)) \in \mathbb{P}$
40: . . . . .wf. . . . . NILNIL

7. $a : T$
8. $b : T$
9. $c : T$
$\vdash (E'(b,c) \Rightarrow E'(a,c)) \in \mathbb{P}$
41: . . . . .wf. . . . . NILNIL

7. $a : T$
8. T
9. T
$\vdash a \in T$
42: . . . . .wf. . . . . NILNIL

7. T
8. $b : T$
9. T
$\vdash b \in T$
43: . . . . .wf. . . . . NILNIL

7. T
8. $b : T$

9. $c : T$
$\vdash E(b,c) \in \mathbb{P}$
44: . . . . .wf. . . . . NILNIL

7. T
8. $b : T$
9. $c : T$
$\vdash E'(b,c) \in \mathbb{P}$
45: . . . . .wf. . . . . NILNIL

7. $a : T$
8. T
9. $c : T$
$\vdash E(a,c) \in \mathbb{P}$
46: . . . . .wf. . . . . NILNIL

7. $a : T$
8. T
9. $c : T$
$\vdash E'(a,c) \in \mathbb{P}$
47: . . . . .wf. . . . . NILNIL

7. T
8. T
9. $c : T$
$\vdash c \in T$
48: . . . . .wf. . . . . NILNIL

$\vdash ((\forall a{:}T'.\ E'(a,a))$
$\ \&\ (\forall a,\ b{:}T'.\ E'(a,b) \Rightarrow E'(b,a))$
$\ \&\ (\forall a,\ b,\ c{:}T'.\ E'(a,b) \Rightarrow E'(b,c) \Rightarrow E'(a,c)))$
$=$
$((\forall a{:}T'.\ E'(a,a))$
$\ \&\ (\forall a,\ b{:}T'.\ E'(a,b) \Rightarrow E'(b,a))$
$\ \&\ (\forall a,\ b,\ c{:}T'.\ E'(a,b) \Rightarrow E'(b,c) \Rightarrow E'(a,c)))$
49:

$\vdash ((\forall a{:}T.\ E'(a,a))$
$\&\ (\forall a,\ b{:}T.\ E'(a,b) \Rightarrow E'(b,a))$
$\&\ (\forall a,\ b,\ c{:}T.\ E'(a,b) \Rightarrow E'(b,c) \Rightarrow E'(a,c)))$
$\iff ((\forall a{:}T'.\ E'(a,a))$
$\&\ (\forall a,\ b{:}T'.\ E'(a,b) \Rightarrow E'(b,a))$
$\&\ (\forall a,\ b,\ c{:}T'.\ E'(a,b) \Rightarrow E'(b,c) \Rightarrow E'(a,c)))$
.

---

http://www.nuprl.org/FDLcontent/p0_942988_/p121_81922_{equiv_rel_functionality_wrt_iff}1_1_0.html